さとがえりパズルの効率的な解法に関する研究

著者	戸沼 諒
学位授与機関	Tohoku University
URL	http://hdl.handle.net/10097/00120710

修士学位論文

さとがえりパズルの効率的な解法に関する研究

東北大学大学院 情報科学研究科
システム情報科学専攻 篠原研究室
博士課程前期二年の課程
戸沼　諒

2016年3月15日

目次

第1章

序論

1.1 はじめに

スマートフォンの普及により，多くの人がゲームという娯楽に対して興味関心を持つようになっている．アクションゲームやRPGのようなゲームから，将棋やクロスワードといった実際に人が駒を動かしたり紙に書き込むといった動作を伴うアナログなゲームまで，多くのジャンルのゲームが遊ばれている．ゲームに関する研究は多岐にわたっており，格闘ゲームにおけるより強力なAIに関する研究 [12] や，詰将棋の自動作題に関する研究 [8]，一般化三並べの勝敗判定に関する研究 [6]，モンテカルロ探索をぷよぷよに適用した研究 [10] などが行われている．その中でも，パズルゲームは論理的な思考を必要とするものが多く，我々研究者の興味をひく対象である．

特に，ペンシルパズルに関する研究は盛んに行われている [9]．ペンシルパズルは，与えられた図に対して鉛筆などで書き込みをして解くパズルの総称である．ペンシルパズルにおいては，NP完全性やASP完全性を示した研究が数多く存在している．既にスリザーリンク [13] やののぐらむ [5] など，多くのペンシルパズルのNP完全性やASP完全性が証明されている．本研究ではさとがえりと呼ばれるパズルを対象とする．さとがえりとは株式会社ニコリの雑誌「パズル通信ニコリ」に掲載されたペンシルパズルの一種である [7]．

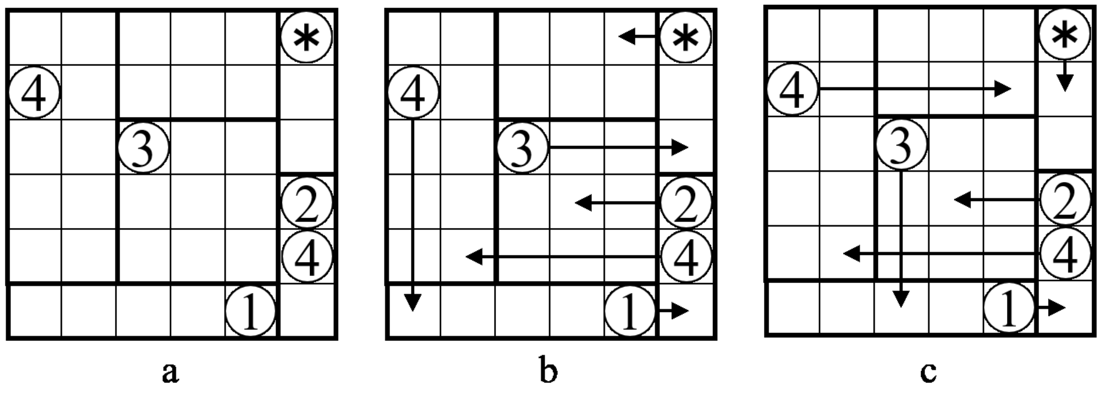

図 1.1: さとがえりの問題と解答の例

1.2 さとがえり

さとがえりは，内部を格子状のマス目で区切られた長方形と盤上に配置された ◯ が問題として与えられ，格子に沿って太線で区切られた部分（以下，国と表記する）のすべてに ◯ がひとつずつ入るように，◯ を移動することを目的とする．◯ の移動は以下の制約を満たす必要がある．

- ◯ は縦横いずれかにまっすぐに移動する．
- ◯ が移動した跡や，他の ◯ のあるところには ◯ を移動できない．
- ◯ の中の数字は移動するマス数を表す．数字のない ◯ は 0 以上の任意のマス数を移動することができる．

さとがえりは通常，0 以上の任意のマス数を移動することができる ◯ はその内部に何も書かないが，本論文では $*$ を記述し ⊛ と表現する．

図 1.1 a にさとがえりの問題の例を示し，この問題を解くことを考える．まず最初に，右下の ④ に注目する．ちょうど 4 マスの移動をしなくてはいけないため，左方向に移動する必要があることがわかる．移動跡が交差してはいけないというルールから，中央の ③ が右方向に移動する．同様に右下の ② は左方向に移動する．ここで，すべての国に ◯ をひとつずつ配置しなくてはならないというルールから，右下の ① が右方向に移動することがわかる．同様に解き進めると，図 1.1 b のような解が得られる．この問題は図 1.1 b を唯一の解として持ち，別解は存在しない．図 1.1 c はすべての国に ◯ をひとつずつ

配置しなくてはならないというルールを守っているが，移動跡が交差してはいけないというルールを破っているために解ではない．

さとがえりの解の存在判定はNP完全であることがすでに知られている [4]．既存の結果では，CircuitSAT からの還元により，⓪，①，②，③ の4種類の ◯ を用いて証明を行っている．本研究では，⊛ のみを用いる制限をかけたさとがえりの解の存在判定問題がNP完全であることを，制限付きの3彩色問題 [2] からの還元により示す．特殊な例として，◯ の中の数字を制限したり，さとがえりの長方形全体の一辺を1に制限した場合に，解の存在判定が多項式時間で行えることを示す．制限のないさとがえりに対して，二部グラフマッチング問題への変換 [11] を用いることで解の候補を出力する方法が有効であるかを実験的に検証する．

1.3 本論文の構成

本論文では，第2章でさとがえりの解の存在判定がNP完全であることを示す．第3章では，特定の条件下において解の存在判定が多項式時間で行えることを示し，第4章で二部グラフマッチング問題への変換を用いることの有用性を考察する．第5章でまとめと残された課題について触れる．

第 2 章

NP 完全性の証明

本章では，さとがえりの解の存在判定問題が NP 完全であることを示す．

2.1　NP 完全性の証明

さとがえりの NP 完全性はすでに証明されているものの，その証明に用いられるガジェットには ⓪，①，②，③ と，4 種類の ◯ が使用されている．本論文では，⊛ の 1 種類のみを用いたさとがえりでも NP 完全となることを示す．なお，証明にあたっては杉村によるスリザーリンクスの NP 完全性の証明を参考にした [14].

本章では次の定理を証明する．

定理 1 ⊛ を用いたさとがえりの解の存在判定問題は NP 完全である．

解として，どの ◯ がどの方向に何マス移動するかという情報が与えられれば，それが条件を満たすかどうかは容易に検証可能であるため，この問題は NP に属する．

この問題が NP 困難であることを示すために，次の事実を用いる．

補題 1 各頂点の次数が 4 以下の平面グラフにおける 3 彩色問題は NP 完全である．

この制限付き 3 彩色問題からさとがえりへの多項式時間還元を示す．

最初に，次の事実を用いる [1].

補題 2 頂点数が n，辺の本数が m の各頂点の次数が 4 以下の平面グラフは，$\mathcal{O}(m+n)$ の折れ曲がりで，$\mathcal{O}(m+n) \times \mathcal{O}(m+n)$ のサイズの格子に描画することができる．

補題 2 を用いて，制限付き 3 彩色問題のインスタンスのグラフ G を格子状のグラフ G' に変換する．次に，G' の頂点に対応するガジェットとして図 2.1 のような部品を考える．図 2.1 の上下左右の 4 方向には図 2.2 のような他の頂点とのつなぎとなる部品が配置され，図 2.3 が形成される．図 2.1 に描かれている直線で囲まれた領域は国である．図に灰色で示した部分は，図 2.4 のような構造となっている．

図 2.1 の中央左下に存在する十字の形をした国の右側の ⊛ は必ず移動しなくてはいけないため上下または右のいずれかに移動する．移動した先の国には ⊛ が存在しているため，押し出されるように移動を繰り返す．どの方向を選択したとしても，最後は十字形の国の左側に存在する丁字の国まで ⊛ の移動は伝搬する．このとき，伝搬する方向によっては最後の丁字の国で止まらずに通過することが考えられるが，伝搬する先には ⊛ の移動跡が既に存在するため，このような移動は不可能となっている．以上の移動は，特定の一色を選択したことと同じ意味を持つ．この部品では，最初の ⊛ の移動の方向を変えることで色を選択することが可能である．図 2.2 にあらわされるつなぎの部品は，隣接する頂点で同じ色を選択できないように制限する部品である．隣接する頂点が同じ色を選択した場合，この部品で ⊛ の移動跡の交差が発生する．この部品どうしを直線や折れ曲がりの線によってつなぐ．直線に対応するガジェットとして図 2.5 を，折れ曲がりに対応するガジェットとして図 2.6 と図 2.7 を考える． 直線部分は図 2.5 を配置し，折れ曲がりは図 2.6 を配置する．図 2.6 にない形の折れ曲がりに関しては，図 2.7 を用いることで，色の対応を取りながら折れ曲がりを表現することが可能である．このようにガジェットを組み合わせることで，直行描画された格子状のグラフ G' に対応するさとがえりの問題図が得られる．

さとがえりのルールとガジェットの形状から元々のグラフ G が 3 色で塗り分けられる時，かつその時に限って構成されるさとがえりが解を持つ．最後の丁字の国に配置された ⊛ の移動元を確認することで構成されるさとがえりから色を取り出すことも容易である．また，問題図のサイズは G の頂点数 n と辺の本数 m に対して多項式オーダであるので，この変換は多項式時間で計算可能である．

以上より，さとがえりの解の存在判定問題が NP 完全であることが示された．□

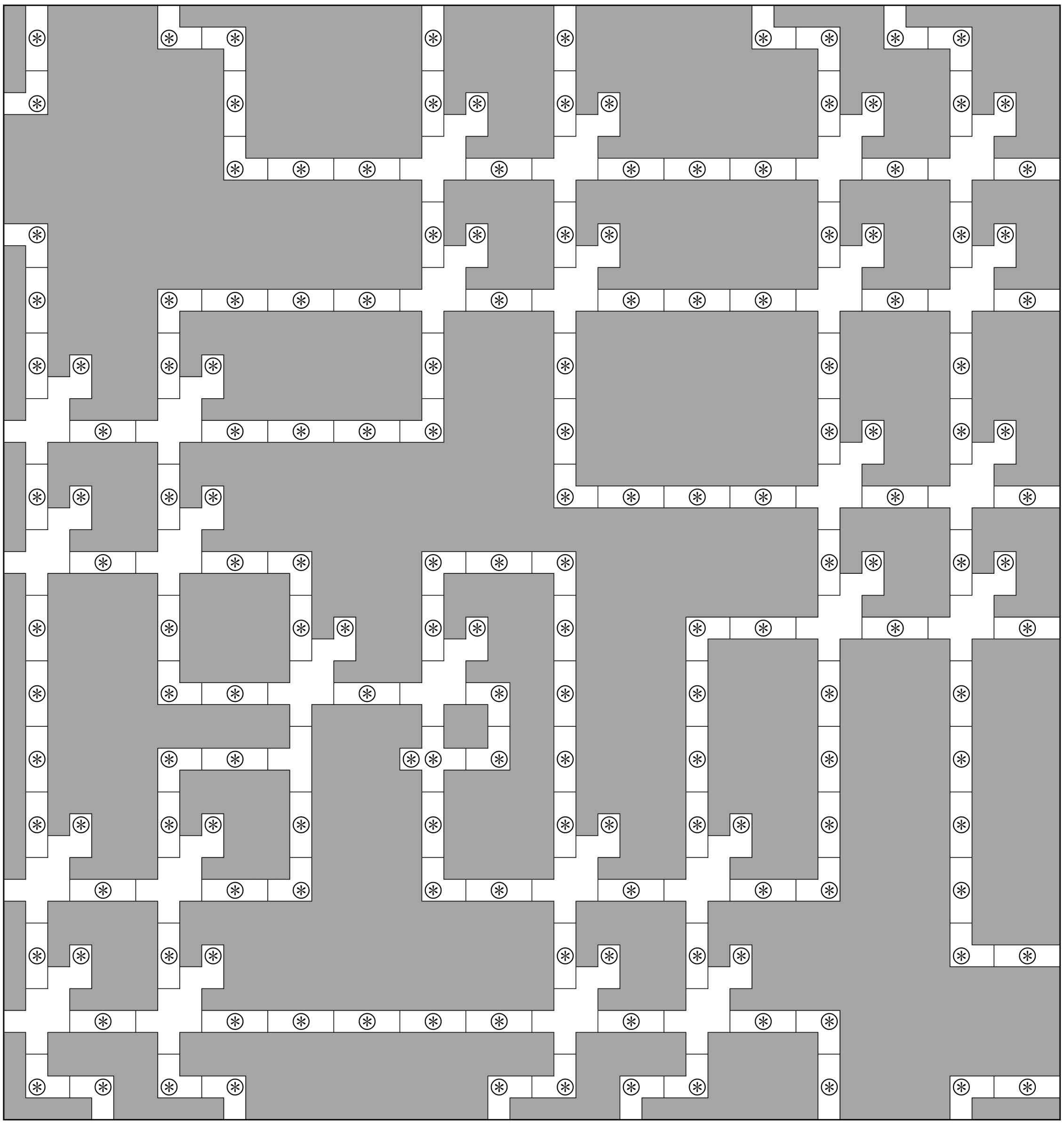

図 2.1: 頂点に対応する部品

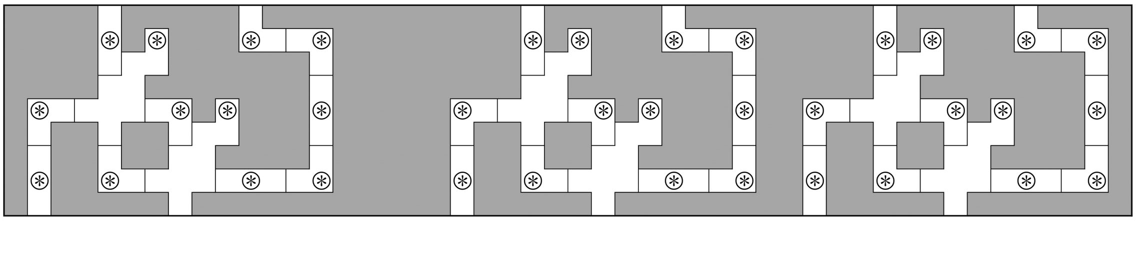

図 2.2: つなぎの部品

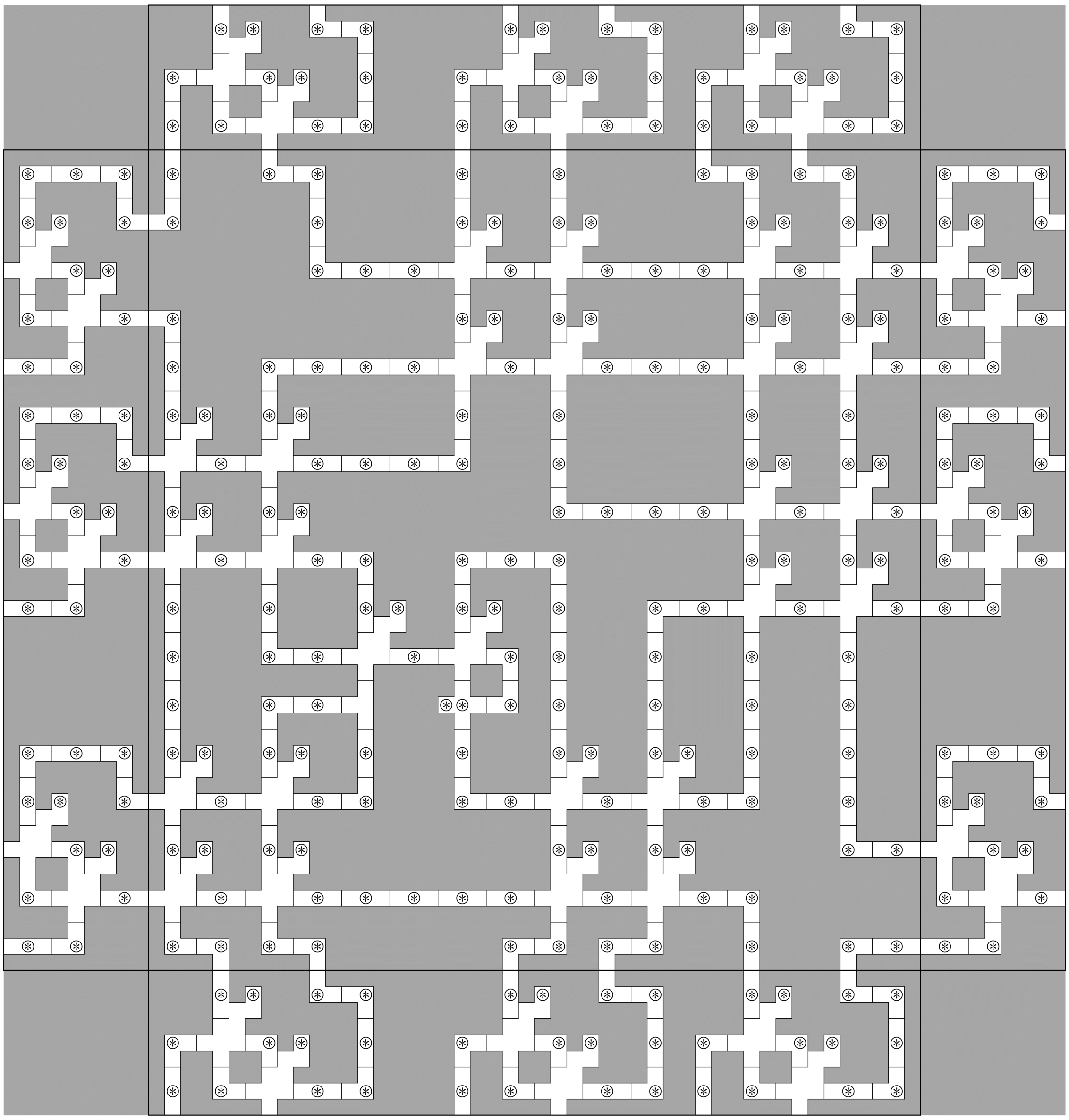

図 2.3: 頂点とつなぎからなる部品

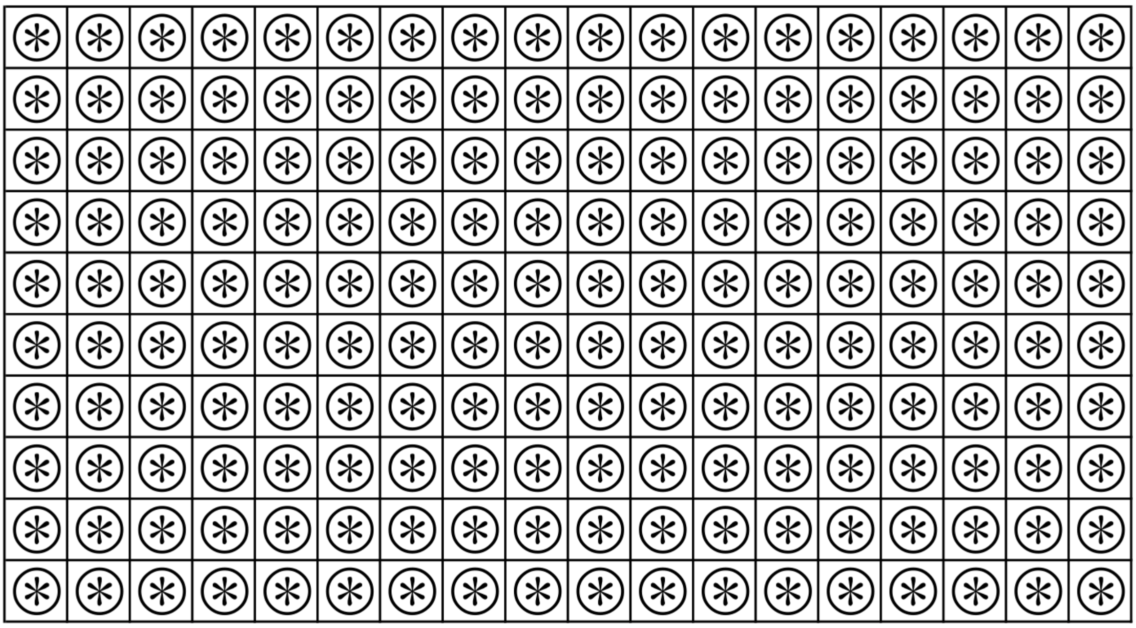

図 2.4: 灰色部分における構造

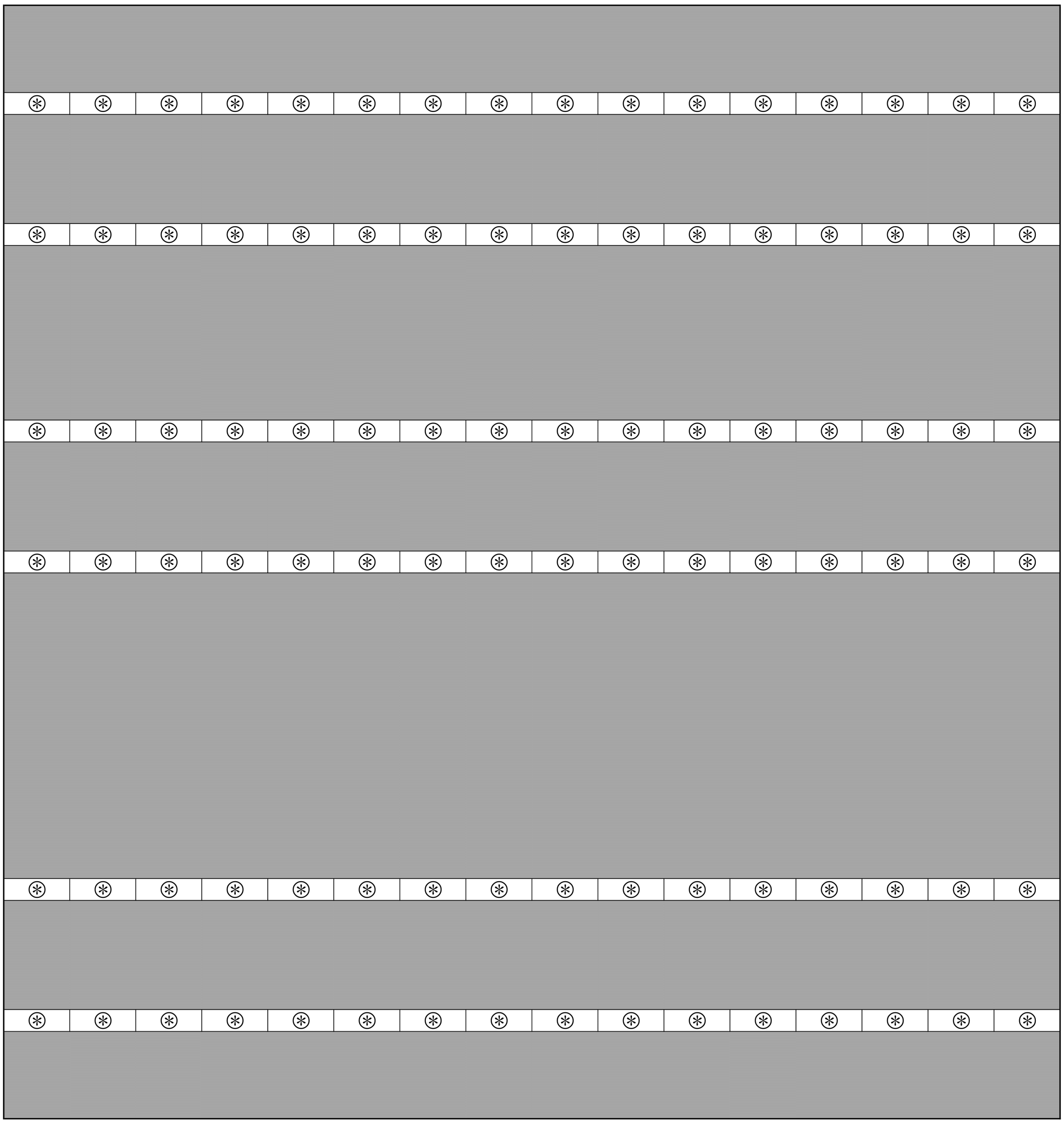

図 2.5: 直線に対応する部品

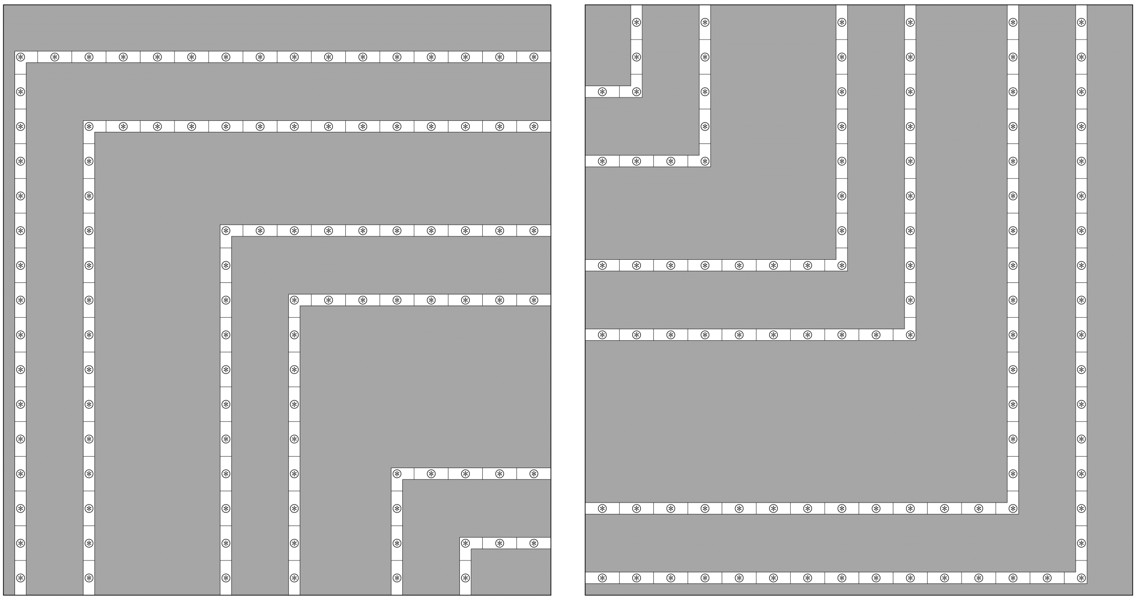

図 2.6: 折れ曲がりに対応する部品 (1)

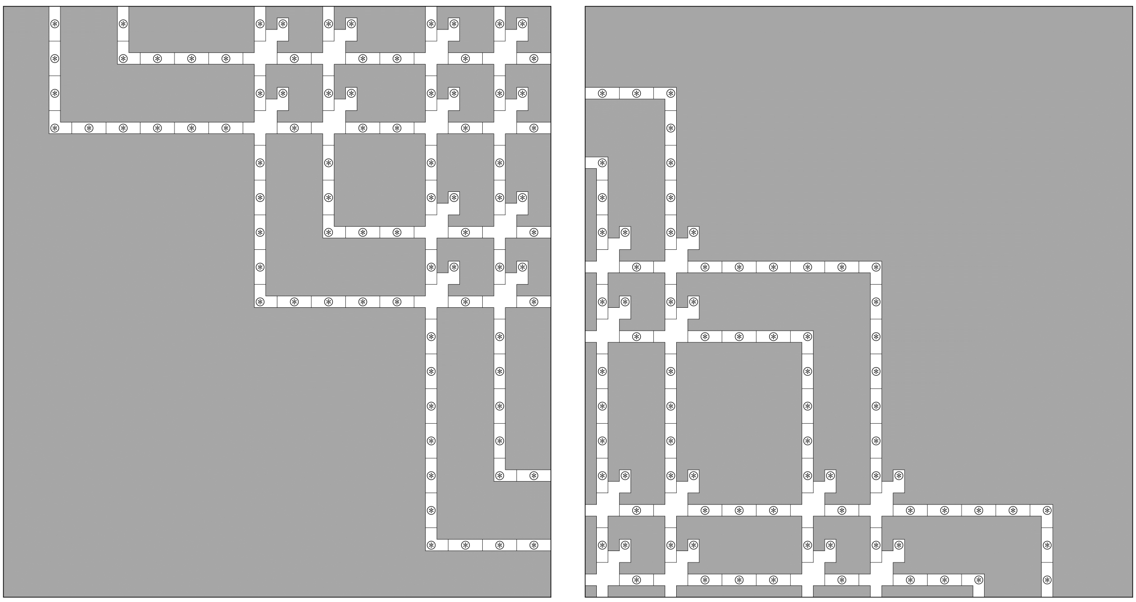

図 2.7: 折れ曲がりに対応する部品 (2)

第3章

多項式時間で解ける特殊な例

本章では，前章で解の存在判定がNP完全であると示したさとがえりに対して，特定の条件下において解の導出が多項式時間で行えることを示す．

3.1 ◯ が移動した跡の交差を許した場合

移動した跡の交差を許した場合，さとがえりの解の導出問題は二部グラフマッチング問題に変換することで多項式時間で解の導出を行うことができる．さとがえりの ◯ と国を頂点として，◯ がどの国に移動可能であるかの関係を辺として表すことで，さとがえりを二部グラフマッチング問題に変換することが可能である．

図 3.1 にさとがえりを二部グラフマッチング問題に変換する例を示す．⊛ は ⓘ の頂点と対応しており，I，II，IV の国を移動先とすることができる．すべての頂点に対してこの関係をグラフとして表すと，例のような二部グラフを得ることができる．

さとがえりにおける長方形の大きさを $m \times n$，◯ の数を p とする．数字付きの ◯ の移動先の候補は高々4であり，⊛ の移動先の候補は高々$m+n-1$ である．国の数は ◯ の数と等しいため，個数は p である．よって，二部グラフマッチングにおける頂点の数は $2p$ であり，辺の数は高々$p(m+n-1)$ となる．二部グラフマッチング問題は，頂点の数を $|V|$，辺の数を $|E|$ とすると $\mathcal{O}(|V||E|)$ で解くことができる．以上から，さとがえりを二部グラフマッチング問題に変換することで，$\mathcal{O}(p^2(m+n))$ で解くことができる．

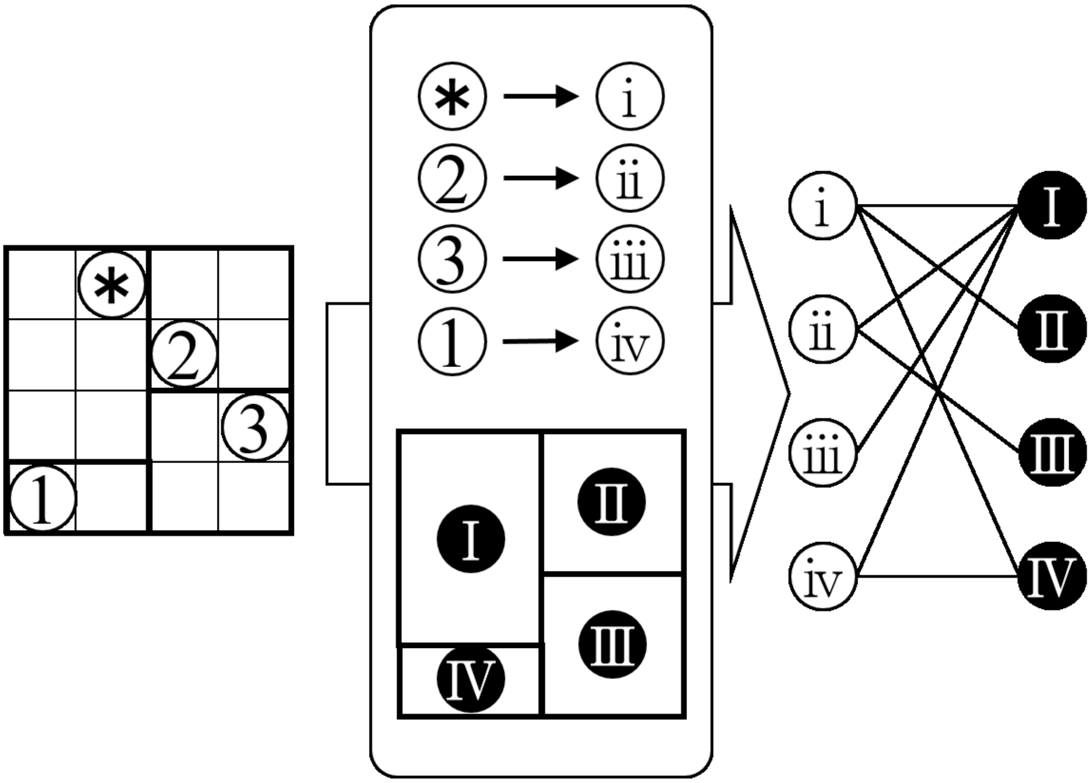

図 3.1: さとがえりを二部グラフマッチング問題に変換する例

3.2 ◯に用いられる数字が 0 と 1 のみの場合

用いられる数字が 0 か 1 のみのさとがえりにおいては，交差が生じる場合は移動先が衝突している場合に限られる．この条件を満たす問題を二部グラフマッチングへの変換を用いて解いた場合，その解には移動先の衝突が存在しない．移動先の衝突がない場合，もともとの問題では交差が発生していない解となる．つまり，この問題に限っては二部グラフマッチングへの変換を用いることで多項式時間で解を導出することが可能である．この場合，二部グラフマッチングにおける頂点の数は $2p$ であり，辺の数は高々$4p$ となるため，$\mathcal{O}(p^2)$ で解くことができる．

3.3 与えられる長方形の一辺の長さが 1 の場合

長方形の一辺の長さが 1 のとき，交差が生じないというさとがえりのルールから，端から順に国に ◯ が到達可能かを検証することで解となるかを確かめることができる．一辺の長さが 1 であるさとがえりの問題例を図 3.2 に示す．問題例では，② を左から 1 マ

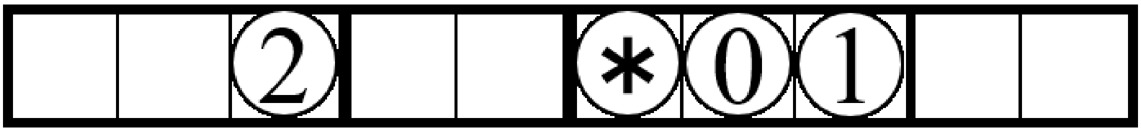

図 3.2: 一辺の長さが 1 であるさとがえりの問題例

ス目，⊛ を 5 マス目，⓪ を 7 マス目，① を 9 マス目に配置することで解となる．

第4章

Graphillionを用いた解の候補数の調査

前章で ◯ が移動した跡の交差を許した場合には多項式時間で解を出力することが可能であることを示した．もともとのさとがえりが解を持つ場合，変換後の二部グラフマッチング問題は必ず一つ以上の解を持つ．この手順によって出力された解の中には，もともとのさとがえりの解となっているものと，交差が発生しているため解とならないものが混在している．さとがえりの問題例を図 4.1 に再掲する．

二部グラフマッチング問題として解いた場合，問題例では図 4.1 b の他に，図 4.1 c も解として得られてしまう．よって，二部グラフマッチング問題の解をさとがえりの解の候補としてさらに検証をする必要がある．さとがえりの解の候補の検証は容易であるため，検証すべき解の候補数によって，問題の難しさが大きく変わる．二部グラフマッチング問題を解くことで得られたさとがえりの解の候補数を実験的に得ることで，この手法が有用であるか検証する．本研究では解の候補の列挙を容易に行うためにGraphillion [3] と呼ばれるライブラリを用いる．

4.1 Graphillion

Graphillionとはグラフ集合を扱うことができるPythonライブラリである。Graphillionを用いることにより，一つのグラフから条件に合致する部分グラフをすべて列挙することが可能である．応用例として，路線図グラフにおけるパスの列挙や，配電ネットワークにおける電力フロー問題などが挙げられる．本章ではGraphillionを用いて，さとがえりからの変換によって得られた二部グラフマッチング問題が解をいくつ持つかを検証する．

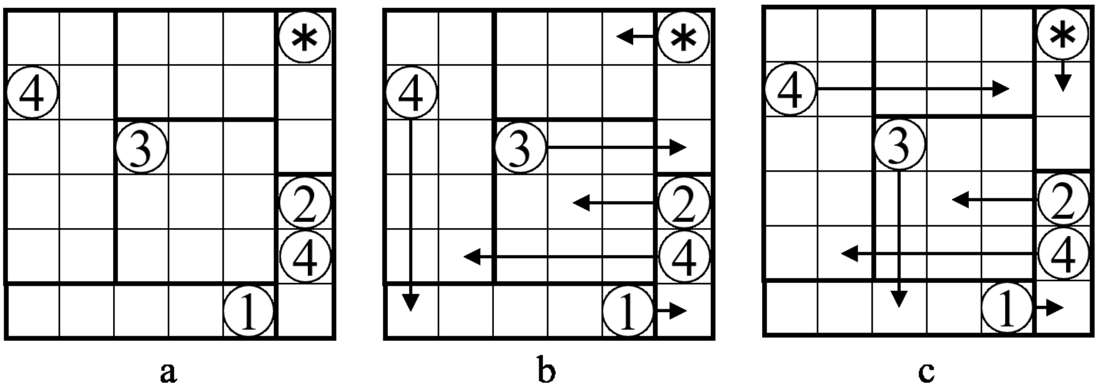

図 4.1: さとがえりの問題例（再掲）

表 4.1: 解の個数の検証結果

長方形のサイズ	国の数	解の候補数
10 × 10	11	2
10 × 10	20	1
10 × 10	29	2
18 × 10	30	1
18 × 10	36	8
18 × 10	36	28,644
24 × 14	73	1,039,956
24 × 14	53	45

4.2 解の個数の検証

さとがえりの問題を二部グラフマッチング問題に変換し，Graphillion を用いて解を求めた．使用したさとがえりの問題は，解が一意に定まることを確認済みである．表 4.1 に，使用したさとがえりの問題の情報と得られた解の個数を示す．

表 4.1 から，長方形のサイズや国の数が大きくなるにしたがって解の候補数は多くの場合で増加する傾向にあることがわかる．特に，解の候補数が 1,039,956 個となる場合があるなど，交差のルールを考慮しないことで解が大幅に増加する例も観測できた．一方で，長方形のサイズと国の数が大きくなるものの，解の候補数が減少する例も見られた．

以上の結果から，長方形のサイズや国の数が大きくなると解の候補数も増加するという傾向が存在するが，問題に依存した特徴による影響が大きいと考えられる．

第5章

まとめ

本論文では，さとがえりと呼ばれるペンシルパズルの解の存在判定問題が ⊛ の 1 種類のみでも NP 完全であることを示した．また，特定の条件下において，解の導出が多項式時間で行えることを示した．さとがえりの解の導出の足掛かりとして，二部グラフマッチング問題に変換した際の解の候補数を検証した．

今後の課題としては，さとがえりにおけるその他の問題や，ルールを変更したさとがえりの亜種に対する困難性の判定，改良が盛んである SAT ソルバを用いたさとがえりソルバの実装などが挙げられる．本論文では NP 完全性の証明を行ったが，ペンシルパズルの分野では別解の存在判定問題や解の個数を答える問題などに関する証明も行われている．さとがえりに関しても同様な研究が考えられる．また，本論文で扱ったさとがえりはルールに変更を加えていない．さとがえりの亜種としては，国に入る ◯ の個数を変化させる，◯ の移動に斜めを加える，長方形をトーラス状にするといったバリエーションが考えられる．そのほか，本論文では二部グラフマッチングへの変換を用いてさとがえりを解くことを考えた．充足可能性問題への変換を行い，SAT ソルバを用いることで解の候補の検証を必要としないソルバを作成することが可能である．

参考文献

[1] Therese C Biedl and Michael Kaufmann. Area-efficient static and incremental graph drawings. Algorithms—ESA'97, pp. 37–52, 1997.

[2] David P Dailey. Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete. *Discrete Mathematics*, pp. 289–293, 1980.

[3] Takeru Inoue, Hiroaki Iwashita, Jun Kawahara, and Shin-ichi Minato. Graphillion: software library for very large sets of labeled graphs. *International Journal on Software Tools for Technology Transfer*, pp. 1–10, 2014.

[4] Shohei Kanehiro and Yasuhiko Takenaga. Satogaeri, Hebi, and Suraromu Are NP-Complete. In *Applied Computing and Information Technology/2nd International Conference on Computational Science and Intelligence (ACIT-CSI), 2015 3rd International Conference on*, pp. 46–51. IEEE, 2015.

[5] Nobuhisa Ueda and Tadaaki Nagao. NP-completeness results for nonogram via parsimonious reductions. Technical Report TR96-0008, Tokyo Institute of Technology, 1996.

[6] ディプタラマ. 手数を変えた一般化三並べの勝敗判定に関する研究. 修士論文, 東北大学大学院情報科学研究科, 2015.

[7] 株式会社ニコリ. 「ニコリ」ホームページ. http://www.nikoli.co.jp/, 2016 年 3 月 15 日　閲覧.

[8] 大瀧貢. 特徴ある詰め手順を持つ詰将棋の自動作題に関する研究. 修士論文, 東北大学大学院情報科学研究科, 2015.

[9] 八登崇之. NP 完全なペンシルパズルの一覧. http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/ yato/data2/puzcc.pdf, 2016 年 3 月 15 日　閲覧.

[10] 大月龍, 前田新一, 石井信. 不完全情報ゲームに対する階層化したモンテカルロ探索とそのぷよぷよへの適用. 電子情報通信学会技術研究報告. NC, ニューロコンピューティング, pp. 275–280, 2014.

[11] 秋葉拓哉, 岩田陽一, 北川宜稔. 問題解決のアルゴリズム活用力とコーディングテクニックを鍛えるプログラミングコンテストチャレンジブック　第 2 版, pp. 195–197. 毎日コミュニケーションズ, 2010.

[12] 中川明紀, 逢坂翔太, 柴崎智哉ほか. ニューラルネットワークによる格闘ゲーム AI の難易度調整及び行動多様性向上手法. 全国大会講演論文集, pp. 801–802, 2008.

[13] 八登崇之. スリザーリンクの NP 完全性について. 情報処理学会研究報告. AL, アルゴリズム研究会報告, pp. 25–31, 2000.

[14] 杉村由花. 整数計画法を用いたスリザーリンクの解法. 卒業論文, 東京大学, 2005.

謝辞

学士，博士課程前期の 3 年間にわたり，研究の場を与えて下さいました東北大学 大学院情報科学研究科 篠原 歩 教授，ならびに東北大学 大学院情報科学研究科 成澤 和志 助教に厚く御礼申し上げます．研究内容に関する多くのご教示，ご指導頂いただいただけでなく，論文の書き方や発表の指導など，基礎的なご指導まで丁寧にしてくださったこと，重ねて御礼申し上げます．

また，本論文審査の副審査員を務めて頂きました，東北大学 大学院情報科学研究科 周 暁 教授，ならびに東北大学 大学院情報科学研究科 木下 哲男 教授には，ご専門の立場から的確なご助言や貴重なご意見を賜りましたことを，心から御礼申し上げます．

東北大学 大学院情報科学研究科 鈴木 顕 助教には，証明に関する多くのご助言を賜りました．深く感謝いたします．

加えて，研究室のみなさまにも，発表練習では大変長い時間付きあっていただき，貴重なご意見を頂きました．ありがとうございました．

最後に，これまでの学生生活を支えてくださった両親に心から深く感謝申し上げます．